SULLA FORMULA DI ERONE PER L'AREA DEL TRIANGOLO.

Siano $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1 , b_2)$ due vettori, e poniamo:

(1) $$c = b - a.$$

Indichiamo con S l'area del triangolo che ha come lati i vettori a e b. Dalla Geometria analitica si ha:

(2) $$2\,S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Eseguendo il quadrato per righe della matrice al punto (2) si ottiene:

(3) $$4S^2 = \begin{vmatrix} a^2 & a \cdot b \\ a \cdot b & b^2 \end{vmatrix}.$$

Per il teorema di Carnot si ha:

(4) $$2\,ab = a^2 + b^2 - c^2.$$

Sostituendo in (3) ed eseguendo i passaggi algebrici si ottiene:

(5) $$16\,S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

che è un'altra forma della classica relazione di Erone, in cui si vede forse meglio la simmetria rispetto ai tre argomenti a, b, c.

N.B. Verificata per il triangolo equilatero e quello rettangolo.

OSS. 1. La formula di Erone è un caso tipico di funzione simmetrica delle tre variabili a, b, c che esprimono le lunghezze dei lati del triangolo. Altre funzioni simmetriche tipiche sono le lunghezze dei raggi della circonferenza inscritta (interna) e della circoscritta. Infatti indicato con p il semiperimetro, cioè ponendo:

(6) $$2p = a + b + c,$$

ed indicando con *r* il raggio della circonferenza inscritta, si ha chiaramente la formula:

(7) $$S = p\,r,$$

di evidente significato geometrico.

Indicato poi con R il raggio della circonferenza circoscritta, dal teorema dei seni e dal teorema di Carnot si ottiene:

$$R^2 = \frac{a^2b^2c^2}{16\,S^2}.$$

VOLUME DEL TETRAEDRO IN FUNZIONE DEGLI SPIGOLI

Siano a, b, c tre vettori non complanari che formano gli spigoli di un tetraedro passanti per un medesimo vertice. Indichiamo con u, v, w rispettivamente gli altri tre spigoli del tetraedro, tra loro complanari; precisamente chiamiamo u lo spigolo sghembo con a, chiamiamo v lo spigolo sghembo con b e chiamiamo w lo spigolo sghembo con c.

Indicato con V il volume del tetraedro, dalla geometria analitica si ha che V è dato dalla relazione:

(1) $$6\,V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Eseguendo il quadrato per righe della matrice al punto (1) si ottiene:

(2) $$36\,V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & a \cdot b & a \cdot c \\ b \cdot a & b^2 & b \cdot c \\ c \cdot a & c \cdot b & c^2 \end{vmatrix}.$$

Applicando ora il teorema di Carnot ai triangoli di lati:

(3) $a, b, w; \quad b, c, u; \quad c, a, v,$

si ottiene:

(4) $$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2 + b^2 - w^2 & a^2 + c^2 - v^2 \\ a^2 + b^2 - w^2 & 2b^2 & b^2 + c^2 - u^2 \\ c^2 + a^2 - v^2 & c^2 + b^2 - u^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Questa formula dà il volume del tetraedro come funzione degli spigoli, quando questi ultimi stiano nelle relazioni di incidenza o di non incidenza enunciate all'inizio.

OSSERVAZIONE 1 - La (4) risulta essere invariante rispetto alle permutazioni dei tre elementi a, b, c ed a quelle conseguenti dalle formule che legano questi vettori ai tre vettori u, v, w:

(5) $w = b - a, u = c - b, v = a - c.$

NOTA. Il problema di determinare il volume del tetraedro quando siano date le lunghezze degli spigoli è stato trattato da Niccolò Tartaglia in "General trattato di numeri et misure", Vinegia 1560, Parte IV, p. 35, e risolto da Eulero [Novi Commentari Acad. Petrop., 4, 1752-53 (ed. 1758), p. 158-160].

Indicati con A_i (i = l, 2, 3, 4) i vertici del tetraedro, e indicando con a_{ij} la lunghezza dello spigolo A_iA_j, cioè ponendo:

(6) $a_{ij} = A_iA_j,$

e ponendo inoltre:

(7) $X_{ij,\ pq} = a_{ij}{}^2 a_{pq}{}^2\ (a_{ip}{}^2 + a_{iq}{}^2 + a_{jp}{}^2 + a_{jq}{}^2 - a_{ij}{}^2 - a_{pq}{}^2),$

(8) $Y_i = a_{jp}{}^2\ a_{pq}{}^2\ a_{qj}{}^2,$

la formula di Eulero è:

(9) $144\,V^2 = X_{12,\ 34} + X_{13,\ 24} + X_{14,\ 23} - (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4).$

Cfr. ENCICLOPEDIA DELLE MATEMATICHE ELEMENTARI di L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli. Milano (U. Hoepli), 1937. Vol. II, Parte I. Art. XXIII di Duilio Gigli e Luigi Berzolari: Teoria della misura.

Altre formule sono state date, tra l'altro, da Legendre e K. K. von Staudt, come risulta dalla bibliografia data nell'articolo ora citato, e da quella contenuta nell'articolo di Giuseppina Biggiogero: La geometria del tetraedro, sempre nel Vol. I della Parte II dell'Enciclopedia citata, Art. XXV.

Il problema è stato ripreso anche da Riccardo Cantoni in Periodico di Matematiche (4)10(1930), p.235 e (4)10(1932), p.231.

NOTA - La formula (4) non è completamente simmetrica: infatti ivi sono distinti i due ruoli: quello degli spigoli a, b, c che passano per un medesimo vertice e quello degli spigoli u, v, w che giacciono nella faccia opposta al vertice in parola. Analoga osservazione potrebbe essere fatta per le formule di Legendre e Staudt sopra citate.

Tuttavia un caso particolare della formula (4) si ha per il tetraedro isoscele (o equifacciale). Infatti questo è determinato soltanto dalle tre lunghezze a, b, c dei lati di una faccia, essendo essa uguale ad ogni altra. In questo caso, posto:

(10) $Q^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2) = a^4(b^2 + c^2) + b^4(c^2 + a^2) + c^4(a^2 + b^2) - (a^6 + b^6 + c^6) - 2\, a^2 b^2 c^2$,

si ha:

(11) $12^2\, V^2 = 2\, Q^2$.

NOTA - Si osservi che l'espressione a secondo membro della (10) è certamente positiva: infatti ognuno dei fattori è positivo, in forza delle condizioni valide per i lati di un triangolo che sia faccia di un tetraedro isoscele.

ULTERIORI SVILUPPI

OSSERVAZIONE 2 - Il teorema di Carnot vale ovviamente anche in uno spazio euclideo reale E^n $(n > 3)$ ad n dimensioni qualunque. Ciò è conseguenza della struttura algebrica dello spazio vettoriale.

Scegliamo due versori a, b, per cui vale dunque

(1) $|a|^2 = a\, a^T = 1$; $|b|^2 = b\, b^T = 1$,

ed osserviamo che il prodotto scalare:

(2) $a \cdot b = a\, b^T = b a^T$

è ovviamente invariante per il gruppo ortogonale.

Poniamo:

(3) $f(t) = |\, a + tb\, |^2 = t^2 + 2\,(a \cdot b)\, t + 1 \geq 0.$

Dalla (3) segue che l'equazione:

(4) $f(t) = 0$

non può avere radici reali e distinte; il che si esprime con la relazione:

(5) $(a \cdot b)^2 \leq 1.$

Si può quindi definire un angolo $\alpha\,(a,\ b)$ dato da:

(6) $\cos \alpha(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a||b|}.$

Ponendo:

(7) $c = b - a,$

si ha:

(8) $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$

ossia:

(9) $2\, a \cdot b = a^2 + b^2 - c^2.$

Siano ora dati nello spazio E^n certi n punti P_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$, vertici di un simplesso ad $n-1$ dimensioni, e supponiamo che l'origine delle coordinate O non appartenga all'iperpiano determinato dai punti P_i. Poniamo:

(10) $$P_i = O + a^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots\dots, n)$$

Dall'ipotesi sui punti P_i segue che i vettori a^i sono indipendenti linearmente. Indichiamo con V l'ipervolume del simplesso *n*-dimensionale che ha come vertici l'origine O e gli n punti P_i. Si ha:

(11) $$n!\,V = Det \begin{vmatrix} a^1 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ a^n \end{vmatrix}.$$

Introduciamo i vettori b^{ik} dati da:

(12) $$b^{ik} = a^k - a^i \,.$$

Dal teorema di Carnot si ha:

(13) $$2a^i \cdot a^k = (a^i)^2 + (a^k)^2 - \left(b^{ik}\right)^2.$$

Indichiamo ora con C la matrice che è il quadrato per righe della matrice (11); gli elementi c_{ik} di C sono dati da:

(14) $$c_{ii} = (a^i)^2 \qquad , \qquad c_{ik} = a_i \cdot a_k = c_{ki}.$$

Moltiplicando per 2^n ed applicando il teorema di Carnot si ottiene una matrice D i cui elementi sono:

(15) $$d_{ii} = 2(a^i)^2 \quad , \quad d_{ik} = d_{ki} = (a^i)^2 + (a^k)^2 - (b^{ik})^2,$$

e di qui

(16) $$2^n (n!)^2 V^2 = Det\ D.$$

Tale formula potrebbe essere considerata come la generalizzazione della formula di Erone e della (4) del paragrafo precedente al simplesso ad *n* dimensioni con $(n+1)$ vertici dello spazio euclideo *n*-dimensionale.

CFM, 7 aprile 1997

Reimpaginato marzo 2016

NdR Si può vedere in rete

Sulle espressioni del volume del tetraedro e su qualche problema di massimo. Giovanni Sansone. Periodico di Matematiche (1923)

http://www.mathesisnazionale.it/archivio-storico-articoli-mathesis/20_50.pdf